

Využití Bar modelů při řešení slovních úloh

Jančařík, A., Jančaříková, K., & Poh, H. S. C. (2023). Využití Bar modelů při řešení slovních úloh. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let: Sborník příspěvků* (s. 73–80).

Antonín Jančařík

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

Kateřina Jančaříková

Katedra biologie a environmentálních studií, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Centrum podpory přírodovědného vzdělávání, UJEP, Přírodovědecká fakulta
katerina.jancarikova@pedf.cuni.cz

Hwee Sim Claire Poh

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
clairepohhs@gmail.com

Abstrakt

Cílem příspěvku je představit jeden z nástrojů Singapurské matematiky známý jako „bar model“, který je využíván pro řešení slovních úloh. Na začátku budou stručně představena teoretická východiska, ze kterých využívání bar modelů vychází, a následně ukázána praktická aplikace využití bar modelů na řešení dvou úloh z Jednotné přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia.

Klíčová slova

bar modely, Singapurská matematika, CPA model, slovní úlohy, reprezentace

Úvodní část

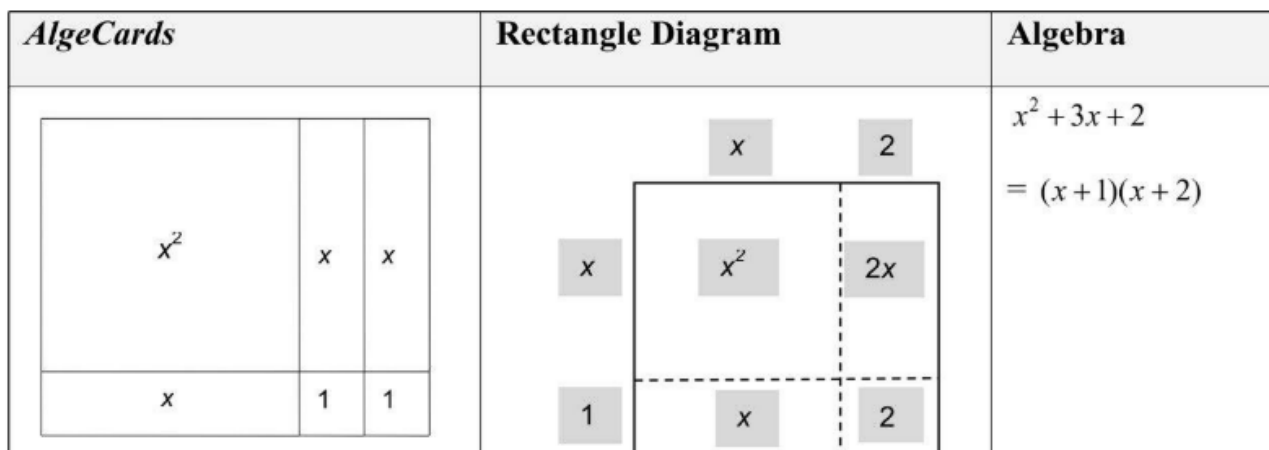
Slovní úlohy patří mezi jedno z kritických míst vyučování matematiky (Rendl & Vondrová, 2014). Po desetiletí jsou ve středu zájmu a předmětem výzkumu v rámci didaktiky matematiky. Cílem tohoto příspěvku je představit jednu z metod, kterou lze při řešení slovních úloh efektivně použít – bar modely (v originálu Bar models). Označení vychází z anglického slova „bar“ znamenajícího sloupec nebo tyč, které se používá např. pro označení sloupcových grafů v programu MS Excel. Metoda bar modelů je jedním z nástrojů, který je součástí fenoménu nazvaného Singapurská matematika. Bar modely jsou nástrojem pro grafickou interpretaci slovní úlohy a tvoří mezistupeň mezi manipulací s konkrétními předměty a algebraickým řešením. V současnosti probíhají snahy o zařazování této metody ve výuce matematiky i v České republice (Jančařík, 2022, Bobek, 2023).

Singapurská matematika, CPA a bar modely

Singapurská matematika (Har, 2007) se stala fenoménem především na základě výsledků mezinárodního testování PISA v roce 2010. Od tohoto roku se Singapur pravidelně umísťuje na předních místech a lze očekávat, že podobného výsledku dosáhne i v testování, jehož výsledky budou zveřejněny v letošním roce. Co však stojí za tímto úspěchem? Kořeny je nutné hledat v minulosti, a to již v osmdesátých letech minulého století, kdy Singapur přistoupil k reformě

vzdělávání. V rámci vyučování matematice se jednalo o vytvoření originálního systému zadávání a řešení úloh (Lee, 2014). Klíčovým prvkem Singapurské matematiky je metoda, kterou známe pod názvem CPA (Concrete-Pictorial-Abstract). Tato metoda vychází z Brunerova enaktivně-ikonicko-symbolického způsobu reprezentace (Bruner, 1966, s. 45).

CPA používá třístupňový proces výuky. Prvním krokem (Concrete) je fyzická manipulace s konkrétními předměty. Následuje grafické znázornění (Pictorial), které je využíváno pro argumentaci a slouží k rozvoji algebraického myšlení a konceptů. Grafické znázornění je v Singapuru hlavním nástrojem řešení úloh především ve druhém až šestém ročníku základní školy. Třetí fáze využívá algebraické vyjádření (Abstract). Propojení všech tří fází je demonstrováno na následujícím obrázku (viz Obrázek 1).



Obrázek 1: Použití CPA modelu (dle Leong, Chang, 2015)

Fáze manipulace s konkrétními objekty je zde reprezentována pomocí algebraických dlaždic, fáze grafického znázornění pomocí obdélníků a fáze algebraická pomocí výrazů s proměnnými. Právě prostřední (grafická) fáze tvoří spojnici mezi konkrétní manipulací s objekty (dlaždicemi) a algebraickým vyjádřením. Způsob, jak je situace znázorněna pomocí bar modelu, zde tvoří základ pro porozumění algebraickému vyjádření. Praktické použití bar modelů si budeme v následujícím textu demonstrovat na dvou úlohách z Jednotné přijímací zkoušky.

Použití bar modelů

První úloha je převzata z testu Jednotné přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia z roku 2021, prvního náhradního termínu. Zadání úlohy zní:

- Do prázdné mísy jsme dali máslo o hmotnosti 120 g a přidali mouku a cukr. Suroviny v míse váží dohromady půl kilogramu. Cukru je v míse o 80 g méně než mouky.
- Vypočítejte, kolik gramů mouky je v míse.

Pro řešení úlohy použijeme metodu Bar modelů. Nejprve si připravíme jeden obdélník, který bude reprezentovat obsah mísy (Obrázek 2).



Obrázek 2: Použití bar modelu – krok 1

Následně do mísy přidáme máslo o hmotnosti 120 gramů (Obrázek 3).

Máslo – 120 g	
----------------------	--

Obrázek 3: Použití bar modelu – krok 2

Dále je uvedeno, že do mísy budeme přidávat mouku a cukr. Zbylou část obdélníku tedy budeme dělit na dvě části. Následuje podstatná informace, kterou může přímo využít. Celkem budou všechny suroviny vážit 0,5 kg, tedy 500 g. Můžeme určit hmotnost přidávaných přísad (Obrázek 4).

Máslo – 120 g	
	380 g
500 g	

Obrázek 4: Použití bar modelu – krok 3

Další informace v zadání je, že cukru je o 80 g méně než mouky (Obrázek 5).

	500 g	
Máslo	Cukr	Mouka
		80 g
120 g		380 g

Obrázek 5: Použití bar modelu – krok 4

Pokud odebereme 80 g mouky, bude v míse stejné množství cukru i mouky. Dohromady budou tyto suroviny vážit 300 g. Hmotnost každé z nich tak bude 150 g (Obrázek 6).

Máslo	Cukr	Mouka	80 g
120 g	150 g	150 g	80 g
120 g	380 g		
500 g			

Obrázek 6: Použití bar modelu – krok 5

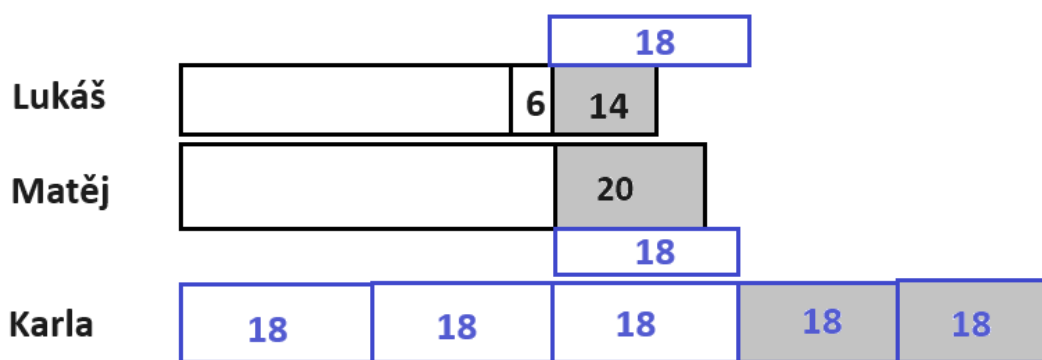
Nyní můžeme odpovědět na položenou otázku. Mouky je v míse 230 g.

Při řešení této úlohy jsme postupovali tak, aby bylo jasné, co se při řešení děje. Ve skutečnosti je zápis mnohem stručnější a všechny informace se vejdou do jediného sloupce. Stručné řešení si ukážeme na následující úloze.

Jedná se o úlohu ze stejného testu Jednotné přijímací zkoušky pro osmiletá gymnázia. Nejprve uvedeme zadání úlohy:

- Lukáš vyhrál nad Matějem 20 kuliček, ale pak někde 14 kuliček ztratil.
- Potom přišla Karla, která měla 90 kuliček.
- Když pětinu z nich rozdělila rovným dílem mezi oba chlapce, měli všichni tři stejný počet kuliček.

Úlohu nejprve prezentujeme bez položených otázek. Cílem je pomocí bar modelu popsat, co se v úloze dle zadání stalo. Celou situaci vystihuje Obrázek 7.



Obrázek 7: Použití bar modelu – Druhá úloha

Na základě tohoto znázornění situace můžeme zodpovědět všechny tři zadané otázky:

- Kolik kuliček zbylo Karle? (54)
- Kolik kuliček měl Lukáš před výhrou nad Matějem? (30)
- Kolik kuliček měl Matěj před prohrou s Lukášem? (56)

Závěr

Náčrtky mohou pomoci žákům pochopit zadání slovních úloh. Bar modely, které jsme se pokusili představit v tomto článku, jsou velice silným a efektivním nástrojem, pomocí něhož lze řešit naprostou většinu slovních úloh na prvním i druhém stupni základních škol. Bar modely nenahrazují algebraická řešení pomocí rovnic, ale vytváří prostor pro jejich lepší a hlubší porozumění. Systematické seznamování žáků s tímto nástrojem a používání metody CPA by mohlo přispět ke zlepšení výsledků českých žáků při řešení slovních úloh.

Reference

Bobek, P. (2023) Bar modely jako způsob reprezentace vztahů a operací ve slovních úlohách. In: *Slovní Úlohy – Metodická příručka – Matematika a její aplikace*. NPI ČR. On-line: <https://matematika-slovni-ulohy.projektsypo.cz/>

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Har, Y. B. (2007). The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication. In *Proceeding of APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study, Focusing on Mathematical Communication*, s. 9–14.

Jančařík, A. (2022) Slovní úlohy v jednotné přijímací zkoušce a proč je neřešit rovnicemi. In: Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2022. Plzeň: Vydavatelský servis, s. 101-106.

Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator*, 16(1), s. 1-18.

Rendl, M., & Vondrová, N. (2014) Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace* 24(1), s. 22–57